ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 2º semestre, Época Normal 01. 17

2horas. (20 valores)

Nome:____Turma:________

Espaço reservado para classificações					
1a.(20)	2a.(15)	3(15).	4a.(10)	4c.(15)	5a.(10)
1b.(10)	2b.(20)		4b.(10)	4d.(25)	5b.(20)
		6.(15)	7.(15)	T:	

Atenção: todas as questões devem ser <u>devidamente formalizadas e justificadas</u>.

1. O mercado do serviço de rede móvel reparte-se por 3 empresas: **A** com uma quota de 50%, **B** com 30% e **C** com 20%. Um estudo levado a cabo por uma associação de consumidores revelou que 17% dos utilizadores do serviço estão insatisfeitos e que estes utilizadores insatisfeitos se distribuíam da seguinte forma: 35% eram clientes da empresa **A,** 35% da **B** e 30% da **C**..

a) Qual a probabilidade de um cliente, ligado à rede da empresa **B,** estar insatisfeito?

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(C) = 0.2, P(Ins.) = 0.17, P(A|Ins.) = 0.35, P(B|Ins.) = 0.35, P(A|Ins.) = 0.3$$

$$P(B|Ins.) = \frac{P(B \cap Ins.)}{P(Ins.)} \Leftrightarrow 0.35 = \frac{P(B \cap Ins.)}{0.17} \Leftrightarrow P(B \cap Ins.) = 0.35 * 0.17 = 0.0595$$

$$P(Ins.|B) = \frac{P(B \cap Ins.)}{P(B)} = \frac{0.0595}{0.3} = 0.1983$$

b1) Seleccionados ao acaso 10 utilizadores de rede móvel qual a probabilidade de pelo menos 4 estarem ligados à rede da empresa **A**?

0,8828 ☐ 0,6230 ☐ 0,8281 X 0,7949 ☐

b2) Seleccionados ao acaso 10 utilizadores de rede móvel qual a probabilidade de pelo menos 4 estarem ligados à rede da empresa **B**?

0,3504 X 0,1503 ☐ 0,7332 ☐ 0,7999 ☐

b3) Seleccionados ao acaso 10 utilizadores de rede móvel qual a probabilidade de pelo menos 4 estarem ligados à rede da empresa **C**?

0,1209 X 0,0328 ☐ 0,7987 ☐ 0,9119 ☐

2. Duas variáveis aleatórias X e Y assumem apenas os valores 0, 1 e 2. A função de probabilidade conjunta é dada pelo quadro seguinte:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$3/k$	$2/k$	$1/k$	$6/k$
1	$2/k$	$1/k$	0	$3/k$
2	$1/k$	0	0	$1/k$
$f_Y(y)$	$6/k$	$3/k$	$1/k$	

a) Obtenha k e determine o $E(Y)$ e o $E(Y|X=1)$. O que pode concluir **<u>com base nos valores obtidos</u>** sobre a independência entre as variáveis X e Y?

$$\sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \frac{6}{k} + \frac{3}{k} + \frac{1}{k} = \frac{10}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 10$$

$$E(Y) = \sum_{y \in D_Y} y * f_Y(y) = \sum_{y=0}^{2} y * f_Y(y) = 0 * \frac{6}{10} + 1 * \frac{3}{10} + 2 * \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y|X=1) = \sum_{y \in D_Y} y * f_{Y|X=1}(y) = \sum_{y=0}^{2} y * \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}$$

$$= 0 * \frac{f_{X,Y}(1{,}0)}{3/10} + 1 * \frac{f_{X,Y}(1{,}1)}{3/10} + 2 * \frac{f_{X,Y}(1{,}2)}{3/10} = 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Como $E(Y) \neq E(Y|X=1)$, as variáveis aleatórias X e Y não são independentes

b) Calcule o coeficiente de correlação - $\rho_{X,Y}$. Interprete o valor obtido.

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 * \sigma_Y^2}} = \frac{E(X.Y) - E(X) * E(Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 * \sigma_Y^2}} = \frac{-3/20}{\sqrt{\frac{9}{20} * \frac{9}{20}}} = -0.333$$

$$E(X.Y) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} xy * f_{X,Y}(x,y) = 1 * 1 * \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$E(X) = \sum_{x \in D_X} x * f_X(x) = \sum_{x=0}^{2} x * f_X(x) = 0 * \frac{6}{10} + 1 * \frac{3}{10} + 2 * \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in D_X} x^2 * f_X(x) = \sum_{x=0}^{2} x^2 * f_X(x) = 0 * \frac{6}{10} + 1 * \frac{3}{10} + 4 * \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in D_y} y^2 * f_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} y^2 * f_Y(y) = 0 * \frac{6}{10} + 1 * \frac{3}{10} + 4 * \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{7}{10} - \frac{1}{4} = \frac{9}{20} = Var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2$$

O valor de $\rho_{X,Y}$ diz-nos que as variáveis variam em sentido inverso quando uma cresce a outra decresce e vice-versa. Diz-nos também que a associação entre as variáveis não é fraca.

3. Seja a variável aleatória bidimensional contínua (X,Y) com função densidade probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = xy \quad (0 < x < 2,\ \ 0 < y < 1)$$

Determine $E(X|Y=y)$.

$$E(X|Y=y) = \int_0^2 x * f_{X|Y=y}(x)dx = \int_0^2 x * \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx = \int_0^2 x * \frac{xy}{2y}dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx =$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 xydx = y\int_0^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = 2y \quad (0 < y < 1)$$

4. O Luís foi comprar trutas a um viveiro que funciona da seguinte forma: os clientes pescam as trutas num pequeno lago alimentado pelo viveiro e pagam 3 euros por cada truta que apanharem. Admita-se que o número de trutas apanhadas em 10 minutos, por qualquer cliente, tem uma distribuição de Poisson de média 2.

a1) Sabendo que o Luís utilizou 10 minutos, qual a probabilidade de ter gasto menos de 9 euros?

0,6767 X   0,2707 ☐   0,8571 ☐   0,1804 ☐

a2) Sabendo que o Luís utilizou 10 minutos, qual a probabilidade de ter gasto menos de 6 euros?

0,2707 ☐   0,4060 X   0,2240 ☐   0,6767 ☐

a3) Sabendo que o Luís utilizou 10 minutos, qual a probabilidade de ter gasto menos de 12 euros?

0,9473 ☐   0,1804 ☐   0,8571 X   0,0902 ☐

b1) Com o Luís foi o seu amigo António, que apenas queria uma truta. Qual a probabilidade de o António ter levado menos de 2 minutos a abastecer-se?

0,5507 ☐   0,9502 ☐   0,4512 ☐   0,3297 X

b2) Com o Luís foi o seu amigo António, que apenas queria uma truta. Qual a probabilidade de o António ter levado menos de 3 minutos a abastecer-se?

0,5507 ☐   0,3297 ☐   0,4512 X   0,9817 ☐

b3) Com o Luís foi o seu amigo António, que apenas queria uma truta. Qual a probabilidade de o António ter levado menos de 4 minutos a abastecer-se?

0,3297 ☐   0,5507 X   0,4512 ☐   0,9817 ☐

c) Qual a probabilidade de um cliente levar mais do que 15 minutos para apanhar 5 trutas?

X- nº trutas apanhadas por minuto$\sim Po\left({}^{1}/_{5}\right)$

$\Rightarrow$ Y – tempo entre a pesca consecutiva de 2 trutas$\sim Exp\left({}^{1}/_{5}\right)$

$\Rightarrow$ W- tempo até apanhar 5 trutas$\sim G\left(5, {}^{1}/_{5}\right) \Rightarrow 2\boldsymbol{\lambda W} \sim \boldsymbol{\chi^2_{(10)}}$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{W} > \mathbf{15}) = \boldsymbol{P}\left(2\boldsymbol{\lambda W} > \mathbf{2} * {}^{1}/_{5} * \mathbf{15}\right) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\chi^2_{(10)}} > \mathbf{6}\right) = \mathbf{0.75}$$

b) Seleccionou-se aleatoriamente, do ficheiro de clientes do viveiro, uma amostra de dimensão 10 e registaram-se os tempos que eles levaram até apanhar a 1ª truta. Calcule a probabilidade do cliente que levou mais tempo a apanhar a 1ª truta ter levado menos de 4 minutos.

$$P(Max\{Y_i\} < 4) = G_{(n)}(4) = [F_Y(4)]^{10} = [1 - e^{-0.2*4}]^{10} = 0.0026$$

5. Admite-se que o montante (centenas de euros) de vendas diárias de um site na Internet que comercializa livros e discos é uma v.a. com distribuição normal de média 10 centenas de euros e desvio padrão 4 centenas de euros.

a) Qual a probabilidade do montante de vendas ao fim de 30 dias ser superior a 330 centenas de euros?

X-montante de vendas diário$\sim N(10, 4^2\ )$
Y-montante de vendas mensal= $\sum_{i=1}^{30} X_i \sim N(30 * 10, 30 * 4^2\ )$ porque
$X_i\ \ i = 1, 2, \cdots, 30$ são independentes e identicamente distribuídas a X

$$P(Y > 330) = P\left(\frac{y - n\mu_X}{\sigma_X} > \frac{330 - 300}{\sqrt{30*16}}\right) = P(Z > 1.37) = 1 - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{1.37}) = \mathbf{1 - 0.9147}$$

$= \mathbf{0.0853}$ ou $P(Y > 330) = normcdf(330, 10000, 300, sqrt(30 * 4^2)$

b) Qual o valor que a média de uma amostra casual de dimensão 25 não excede em 90% dos casos?

$$a: P(\bar{X} \le a) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X} - \mu_X}{{}^{\sigma_X}/_{\sqrt{n}}} \le \frac{a - 10}{{}^{4}/_{\sqrt{25}}}\right) = 0.9\ z_\epsilon: P(z > z_\epsilon) = 0.1 \Rightarrow z_\epsilon = 1.282$$

$$\frac{a - 10}{{}^{4}/_{\sqrt{25}}} = 1.282 \Leftrightarrow a = 10 + 1.282 * {}^{4}/_{\sqrt{25}} = 11.025 = invnorm\left(0.9, 10, {}^{4}/_{\sqrt{25}}\right)$$

6. Seja uma variável aleatória X com função geradora de momentos $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} \quad (s < \lambda)$. Obtenha a função geradora de momentos da variável $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$ com X_i v.a.(s) independentes. Usando esta função calcule o valor esperado de Y. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

Sendo X_i v.a.(s) independentes, $M_Y(s) = \prod_{i=1}^{3} M_{X_i}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^3 \quad (s < \lambda)$

$$M_Y'(s) = 3\left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^2 \frac{\lambda}{(\lambda - s)^2} \Rightarrow E(Y) = M_Y'(0) = 3\left(\frac{\lambda}{\lambda - 0}\right)^2 \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{3}{\lambda}$$

7. Seja .$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de uma população X com distribuição Uniforme no intervalo $(0, \theta)$ Mostre que a função distribuição da amostra é dada por : $F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n}$. Justifique todos os passos.

R: $X \sim U(0,\ \theta) \Rightarrow F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{x}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1 \wedge X_2 \leq x_2 \wedge \cdots \wedge X_n \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1) * P(X_2 \leq x_2) * \cdots * P(X_n \leq x_n) \end{aligned}$$

porque $X_i \ \ (i = 1,2, \cdots, n)$ são elementos de uma amostra casual são v.a.(s) independentes pelo que:

$$= \prod_{i=1}^{n} F_x(x_i)$$

porque sendo $X_i \ \ (i = 1,2, \cdots, n)$ elementos de uma amostra casual são identicamente distribuídos a X

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n}$$